

## Ударные взаимодействия

Бойков Владимир Георгиевич

boykov@euler.ru

© «АвтоМеханика», г. Москва, www.euler.ru, 2005

*Представлены основные принципы моделирования ударных взаимодействий и рекомендации по их использованию при решении практических задач в программном комплексе автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем ЭЙЛЕР (EULER). Описаны некоторые примеры моделирования ударных взаимодействий в программном комплексе ЭЙЛЕР.*

### Основные характеристики ударных взаимодействий

Механические ударные взаимодействия появляются в системе при возникновении контакта между поверхностями физических тел (звеньев механической системы). На рис. 1 представлено соударение двух тел. Обычно полагают, что размер области контакта мал по сравнению с размерами тел и поэтому принимается, что ударное взаимодействие происходит в единственной точке  $C$ . Эту точку будем называть *точка соударения*. Предполагается также, что деформации контактируемых поверхностей невелики и через точку соударения можно провести плоскость касательную к обеим поверхностям. Эту плоскость будем называть *касательная плоскость соударения*. Нормаль к этой плоскости, проходящую через точку  $C$ , обозначим  $\mathbf{N}_C$ . Примем, что нормаль  $\mathbf{N}_C$  направлена внутрь первого тела. Определим основные характеристики процесса ударного взаимодействия.

$\delta$  - *деформация* или глубина взаимопроникновения тел определяется как расстояние между точками пересечения контактируемых поверхностей в недеформированном состоянии с осью, которая совпадает с вектором  $\mathbf{N}_C$ . Если контакт между поверхностями отсутствует, то  $\delta = 0$ .

$\mathbf{V}_C$  - *вектор скорости соударения* определим как скорость точки  $C_2^*$  относительно первого тела. Положение точки  $C_2^*$  совпадает с точкой  $C$ , но она неподвижна относительно второго звена.

$V_N$  - *нормальная скорость соударения* равна проекции вектора  $\mathbf{V}_C$  на вектор  $\mathbf{N}_C$ . Положительное значение  $V_N$  соответствует углублению контакта, а отрицательное соответствует процессу выхода из контакта. Можно считать, что  $\dot{\delta} = V_N$ .

$\mathbf{V}_T$  - *вектор тангенциальной скорости соударения* равен проекции вектора  $\mathbf{V}_C$  на касательную плоскость соударения.

Если тангенциальная скорость соударения равна нулю, удар называют прямым. Если же тангенциальная скорость соударения не равна нулю, удар называют косым.

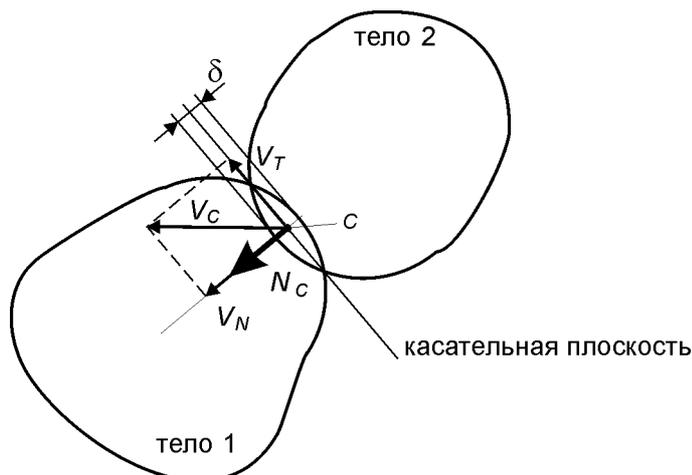


Рис. 1. Соударение двух тел (звеньев)

Разложим ударное взаимодействие на нормальное и тангенциальное. Будем считать, что нормальное взаимодействие создает только контактную силу вдоль вектора  $\mathbf{N}_C$  и точка приложения этой силы совпадает с точкой  $C$ . Тангенциальное взаимодействие создает все остальные силовые воздействия, то есть контактную силу, перпендикулярную вектору  $\mathbf{N}_C$  и все моменты сил относительно точки  $C$ . Можно принять что сила нормального взаимодействия непосредственно не зависит от других силовых взаимодействий в контакте. Далее в данном разделе будем рассматривать только нормальное ударное

взаимодействие. Соответственно под скоростью соударения далее будем понимать нормальную скорость соударения, а под контактной силой – нормальную контактную силу. Тангенциальное ударное взаимодействие сводится как правило к силам трения, моделирование которых рассмотрено в другом разделе.

Процесс удара начинается при возникновении соприкосновения тел и заканчивается выходом тел из соприкосновения. Процесс принято разделять на две фазы: *фазу сжатия* и *фазу восстановления*. Сначала, в фазе сжатия, происходит убывание скорости соударения до нуля, при этом убывает кинетическая энергия соударяющихся тел, но накапливается потенциальная энергия упругих деформаций тел в области контакта. Затем, в фазе восстановления, происходит освобождение накопленной потенциальной энергии и тела расходятся. Важной характеристикой удара является коэффициент восстановления

$$e = \frac{-V_e}{V_0},$$

где  $V_0$  - нормальная скорость соударения перед ударом, в начале фазы сжатия, или начальная скорость удара;  $V_e$  - нормальная скорость соударения после удара, в конце фазы восстановления.

Значение коэффициента восстановления  $e$  находится в пределах  $0 \leq e \leq 1$ . Значение 0 соответствует *абсолютно неупругому*, или *пластическому удару*. Значение 1 соответствует *абсолютно упругому удару*. Коэффициент восстановления  $e$  является коэффициентом восстановления импульса или скорости. Важно отметить, что коэффициент восстановления энергии при ударе равен  $e^2$ . Иногда для экспериментального определения значения  $e$  используют сброс тела на массивную горизонтальную плиту. В этом случае коэффициент восстановления рассчитывается следующим образом

$$e = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}},$$

где  $h_0$  - начальная высота падения;  $h_1$  - высота, на которую поднимается тело после отскока от плиты.

На основании серии экспериментов Ньютон установил (1687 г.), что значение коэффициента восстановления  $e$  определяется материалами соударяемых тел и не зависит от начальной скорости соударения. Это утверждение принято называть *гипотезой Ньютона*. Возможность использования гипотезы Ньютона необходимо обосновывать для каждого конкретного случая. Многочисленные экспериментальные данные и более точные теоретические исследования показывают [2, 3], что в действительности значение  $e$  не является постоянным. Обычно оно монотонно убывает с ростом начальной скорости удара. Таким образом при малых скоростях удар приближается к абсолютно упругому, а при больших – к пластическому. Тем не менее для решения многих практических задач при начальных скоростях удара до нескольких метров в секунду гипотеза Ньютона является простым и эффективным средством и ее можно использовать. В табл. 1 приведены значения коэффициента восстановления для некоторых случаев ударных взаимодействий. При использовании гипотезы Ньютона необходимо также учитывать, что в реальных конструкциях, на которых закреплены соударяемые элементы, при ударе может происходить дополнительное рассеивание энергии. В таких случаях справочные значения коэффициентов восстановления следует корректировать в сторону уменьшения.

Табл. 1. Коэффициенты восстановления

Тип соударения	Значение коэффициента восстановления при начальных скоростях удара порядка 1 м/с
Стеклянные шары	0.94
Стальные шары	0.56
Стальной шар по стальной плите	0.7 – 0.8
Стальной шар по свинцовой плите	0.2 – 0.3
Стальной шар по латунной плите	0.45 – 0.55

В зависимости от поставленной задачи для моделирования ударных взаимодействий могут использоваться различные модели. Ниже в подразделе «Модели одномерных деформируемых элементов» данного раздела приведен краткий обзор моделей. Более подробную информацию о моделях ударного взаимодействия, а также характеристиках ударного взаимодействия для различных тел и в различных условиях можно получить в литературе, список которой приведен в конце раздела. Мы же ограничимся рассмотрением моделей, которые наиболее интересны для практического использования.

### Модели одномерных деформируемых элементов

Материал, изложенный в данном подразделе, следует рассматривать как краткую справочную информацию. Более подробную информацию о моделях ударного взаимодействия, а также характеристиках ударного взаимодействия для различных тел и в различных условиях можно получить в литературе, список которой приведен в конце раздела.

*Деформируемым элементом* принято называть абстрактный объект, который деформируется под действием приложенной нагрузки по заданному закону. Обычно для одномерного деформируемого элемента его характеристика (закон деформации) может быть записана в следующем виде

$$F = F(\delta, \dot{\delta}),$$

где  $F$  - сила, действующая в элементе;  $\delta$  - деформация;  $\dot{\delta}$  - скорость деформации.

Иногда требуется расширенное представление характеристики одномерного деформируемого элемента в виде

$$F = F(\delta, \dot{\delta}, \mathbf{p}),$$

где  $\mathbf{p}$  - вектор некоторых дополнительных параметров, которые являются внешними факторами, действующими на элемент. Это может быть, например, температура, изменяющая упругие или демпфирующие свойства элемента, или иные параметры.

Будем считать, рассматриваемые далее деформируемые элементы являются безынерционными, и поэтому имеется равновесие между силами, приложенными к граничным точкам элемента. Для моделирования силовых взаимодействий в природе и в частности для моделирования ударных взаимодействий широко используются следующие три типа простейших одномерных деформируемых элементов:

- а) упругий элемент, в котором сила зависит только от деформации  $\delta$ ;
- б) вязкий элемент (демпфер), в котором сила зависит непрерывно от скорости изменения деформации  $\dot{\delta}$  и она равна нулю при  $\dot{\delta} = 0$ .
- в) жесткопластический элемент, который используется для описания взаимодействия с сухим трением.

В табл. 2 представлены общепринятые схематические изображения этих элементов и их силовые характеристики.

При моделировании механических систем ведущая роль как правило принадлежит упругим элементам. Упругие элементы можно использовать для моделирования ударных взаимодействий самостоятельно или в совокупности с другими элементами. Но очень важно отметить, что в упругом элементе не происходит поглощение энергии, поэтому их самостоятельное, то есть изолированное, использование возможно только в тех случаях, когда поглощением энергии при ударном взаимодействии можно пренебречь. Например, при моделировании подвески автомобиля иногда можно пренебречь поглощением энергии в отбойниках, если значительно большая часть энергии поглощается в амортизаторах.

В практике моделирования часто используются комбинированные деформируемые элементы, которые представляют собой последовательное и/или параллельное соединение нескольких простейших элементов. В табл. 3 представлены наиболее распространенные комбинированные одномерные деформируемые элементы. Следует отметить, что представленные в этой таблице элементы далеко не исчерпывают возможные типы комбинированных одномерных деформируемых элементов.

Табл. 2. Модели простейших одномерных деформируемых элементов

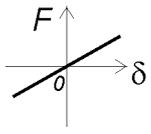
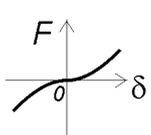
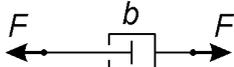
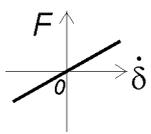
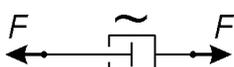
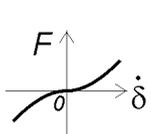
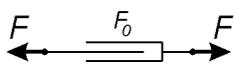
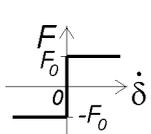
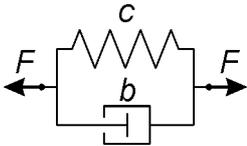
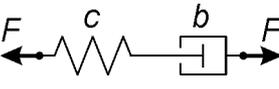
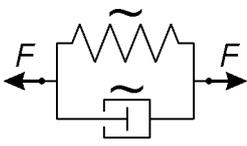
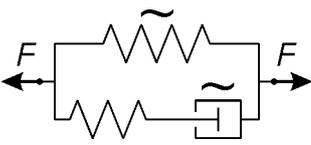
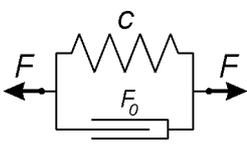
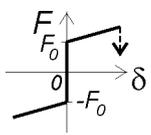
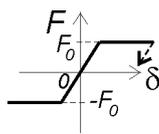
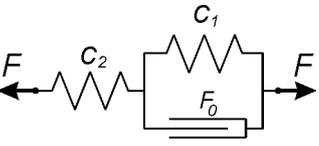
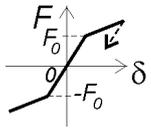
№	Модель элемента	Схематическое изображение элемента	Характеристика элемента
S.1	Упругий линейный		$F = c \cdot \delta$ 
S.2	Упругий нелинейный		$F = F_U(\delta)$ 
S.3	Вязкий линейный		$F = b \cdot \dot{\delta}$ 
S.4	Вязкий нелинейный		$F = F_D(\delta, \dot{\delta})$ 
S.5	Жесткопластический постоянный (жестко-пластический без упрочнения)		$F = F_0 \cdot \text{sign}(\dot{\delta})$ 
S.6	Жесткопластический переменный		$F = F_P(\delta, \dot{\delta}) \cdot \text{sign}(\dot{\delta})$

Табл. 3. Модели комбинированных одномерных деформируемых элементов

№	Модель элемента	Схематическое изображение элемента	Характеристика элемента
С.1	Вязкоупругий (модель Кельвина-Фохта)		$F = c \cdot \delta + b \cdot \dot{\delta}$
С.2	Упруговязкий (модель Максвелла) (фактически это вязкий элемент с запаздыванием)		$\frac{b}{c} \cdot \dot{F} + F = b \cdot \dot{\delta}$
С.3	Вязкий с запаздыванием		$T_1 \cdot \dot{F} + F = F_D(\delta, \dot{\delta})$
С.4	Вязкоупругий параллельный		$F = F_U(\delta) + F_D(\delta, \dot{\delta})$
С.5	Вязкоупругий параллельный с запаздыванием вязкости		$F = F_U(\delta) + F_{DT}$ $T_1 \cdot \dot{F}_{DT} + F_{DT} = F_D(\delta, \dot{\delta})$
С.6	Жесткопластический с упрочнением		
С.7	Упругопластический без упрочнения		
С.8	Упругопластический с упрочнением		

### Вязкоупругие модели ударных взаимодействий

В большом числе случаев в практике моделирования механических систем ударные взаимодействия с достаточно приемлимой точностью можно описать с помощью вязкоупругих моделей. Контактную силу  $F$  при ударе в этом случае можно представить в виде двух составляющих

$$F = F_U(\delta) + F_D(\delta, \dot{\delta}), \quad (1)$$

где  $F_U(\delta)$  - упругая компонента;  $F_D(\delta, \dot{\delta})$  - вязкая компонента.

Упругая компонента зависит только от деформации. Она представляет собой статическую составляющую силы нормального контактного взаимодействия. В простейших случаях для упругой компоненты можно использовать линейную модель, эквивалентную закону Гука:

$$F_U = c \cdot \delta,$$

где  $c$  - коэффициент жесткости.

В более общем случае

$$F_U = K \cdot \delta^\nu,$$

где  $K, \nu$  - эмпирические или теоретические (например модель Герца) коэффициенты.

При наличии экспериментальных данных о статической силе нормального контактного взаимодействия их можно использовать для моделирования, задавая

$$F_U = F_e(\delta),$$

где  $F_e(\delta)$  - экспериментальная функция зависимости силы нормального контактного взаимодействия от деформации.

Вязкая компонента обычно выражается в следующем виде

$$F_D = D \cdot \delta^\eta \cdot \dot{\delta}^\mu, \quad (2)$$

где  $D, \eta, \mu$  - эмпирические коэффициенты.

#### *Общий подход к определению параметров вязкоупругих моделей*

В большинстве практических случаев для определения параметров вязкоупругих моделей ударного взаимодействия можно использовать следующий общий подход, состоящий из трех последовательных этапов.

1. Определение характеристики упругой компоненты  $F_U(\delta)$ . В качестве упругой компоненты используется характеристика статического нагружения. Она может быть получена на основе теоретических расчетов или экспериментальных данных.
2. Определение коэффициента восстановления  $e$  в зависимости от начальной скорости удара. Как уже отмечалось, для многих практических случаев можно использовать гипотезу Ньютона о постоянном значении  $e$  для каждого типа соударения. Данные по значениям коэффициента восстановления могут быть получены из литературы или экспериментальных данных.
3. Определение характеристики вязкой компоненты  $F_D(\delta, \dot{\delta})$  при имеющихся  $F_U(\delta)$  и  $e$ . Для некоторых рассмотренных далее моделей для этого имеются конечные формулы. В некоторых случаях необходимо провести серию тестовых расчетов и на их основе выбрать параметры вязкой компоненты, которые с приемлимой точностью воспроизводят требуемые значения коэффициента восстановления.

Иногда возникает необходимость достоверного моделирования при ударах не только коэффициента восстановления, но и других характеристик, например, максимальных ускорений. В этих случаях следует особое внимание уделить анализу корректности характеристики упругой компоненты  $F_U(\delta)$  и далее также добиваться приемлимой точности модели с помощью подбора параметров вязкой компоненты.

**Важно отметить, что некорректный выбор параметров вязкой компоненты может привести к расчетам к физически неверным результатам. При завышенной вязкости значение коэффициента восстановления может превысить единицу, что физически нереально.**

Рассмотрим использование некоторых вязкоупругих моделей ударного взаимодействия, которые представляют наибольший практический интерес.

#### *Модель Кельвина-Фохта и ее модификации*

В вязкоупругой модели Кельвина-Фохта используется линейная упругая характеристика, соответствующая закону Гука, и линейная характеристика вязкости. Эту модель можно успешно использовать в случаях, когда статическая характеристика нагружения в контакте близка к линейной. Это условие часто выполняется в следующих ситуациях:

- удар через упругую пружину;
- точечный удар в упругую конструкцию;
- случаи, когда площадь пятна контакта существенно не изменяется в процессе удара.

Выражение для контактной силы в модели Кельвина-Фохта имеет следующий вид

$$F = c \cdot \delta + b \cdot \dot{\delta}, \quad (3)$$

где  $c$  - коэффициент жесткости;  $b$  - коэффициент вязкого трения.

Коэффициент восстановления для модели Кельвина-Фохта не зависит от скорости соударения тел, но зависит от массы соударяемых тел и коэффициента жесткости. Если известно значение коэффициента восстановления, то коэффициент вязкого трения для модели Кельвина-Фохта определяется следующим выражением

$$b = 2 \cdot \ln(1/e) \sqrt{\frac{m_* \cdot c}{\ln^2(1/e) + \pi^2}},$$

где  $m_*$  - эквивалентная масса соударяемых тел;

$$1/m_* = 1/m_1 + 1/m_2;$$

здесь  $m_1, m_2$  - массы соударяемых тел.

На рис. 2 представлены следующие характеристики процесса соударения тел по модели Кельвина-Фохта (3).

$D_{\text{contact}} = \delta$  - деформация соударения.

$V_{\text{contact}} = \dot{\delta}$  - нормальная скорость соударения.

$A_{\text{contact}} = \ddot{\delta}$  - нормальное ускорение соударения.

$F_{\text{contact}} = F$  - контактная сила соударения.

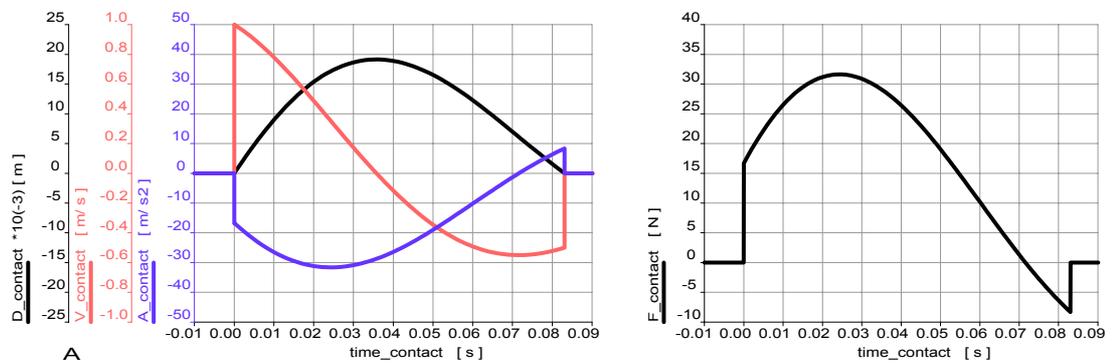


Рис. 2. Характеристики процесса соударения тел по модели Кельвина-Фохта

С точки зрения реалистичности воспроизведения физики процесса соударения тел модель Кельвина-Фохта имеет следующие недостатки.

1. Наличие “прилипания” тел в конце процесса соударения. При этом контактная сила соударения отрицательна и направлена на сближение тел, а не на их расталкивание. Это не соответствует реальной физике процесса.
2. Скачкообразное изменение контактной силы в момент начала соударения. Это происходит из-за того, что вязкая компонента контактной силы в момент начала соударения уже имеет ненулевое значение.

В некоторых случаях эти недостатки не имеют существенного значения и модель Кельвина-Фохта может использоваться в исходной постановке (3). При необходимости указанные недостатки модели Кельвина-Фохта могут быть исправлены.

Для устранения “прилипания” модель Кельвина-Фохта может быть модифицирована следующим образом

$$F = c \cdot \delta + b \cdot \dot{\delta}, \quad (4)$$

$$F \geq 0.$$

На рис. 3 представлены характеристики процесса соударения тел по модифицированной модели Кельвина-Фохта (4).

Для устранения скачкообразного изменения контактной силы в момент начала соударения модель Кельвина-Фохта может быть модифицирована путем введения запаздывания для значения вязкой компоненты. Модифицированная модель Кельвина-Фохта с устранением “прилипания” и запаздыванием вязкой компоненты может быть представлена в следующем виде

$$F = c \cdot \delta + F_D,$$

$$T_1 \cdot \dot{F}_D + F_D = b \cdot \dot{\delta}, \quad (5)$$

$$F \geq 0.$$

где  $T_1$  - параметр запаздывания вязкой компоненты.

Вязкая компонента в модели (5) фактически представляет собой модель упруговязкого элемента Максвелла. На рис. 4 представлены характеристики процесса соударения тел по модифицированной модели Кельвина-Фохта (5).

Следует отметить в модифицированных моделях Кельвина-Фохта (4) и (5), как и в исходной модели (3), коэффициент восстановления не зависит от скорости соударения тел.

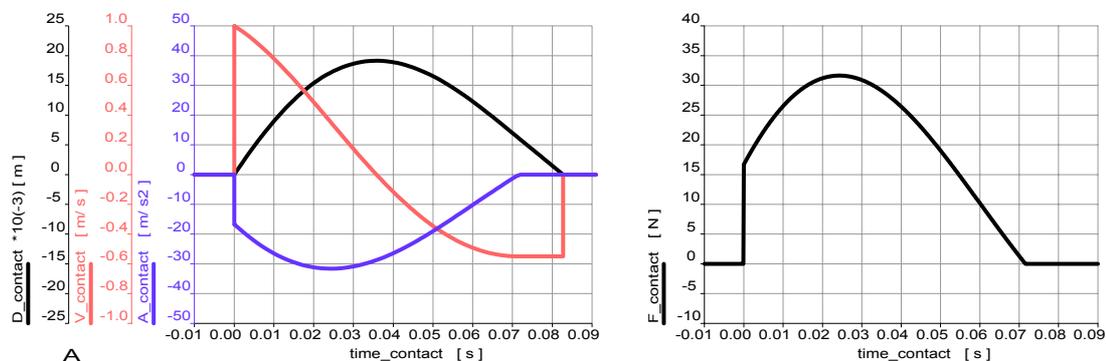


Рис. 3. Характеристики процесса соударения тел по модифицированной модели Кельвина-Фохта (устранено “прилипание”)

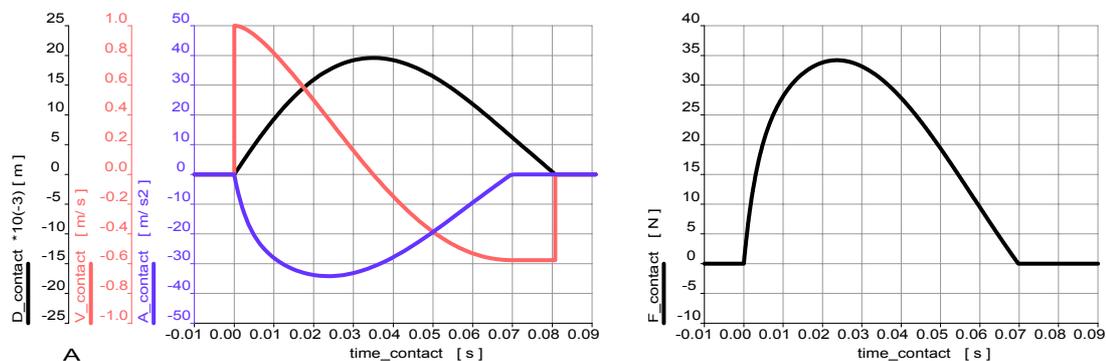


Рис. 4. Характеристики процесса соударения тел по модифицированной модели Кельвина-Фохта (устранено “прилипание”, введено запаздывание вязкой компоненты)

### Модель Герца

Модель Герца основана на теории местных контактных напряжений. Она хорошо описывает процесс контактного взаимодействия сплошных тел (весь объем тела представляет собой однородный материал), при котором тела не приобретают значительные пластические деформации. В частности, эксперименты показывают, что модель Герца дает хорошее совпадение экспериментальных и теоретических данных для удара стальных и латунных шаров и значительно худшее для свинцовых. Это связано с большой долей пластических деформаций, возникающих при ударе свинцовых шаров, а они в модели Герца не учитываются.

В соответствии с моделью Герца в условиях статического нагружения сила в контакте двух тел (упругая компонента) определяется следующим образом

$$F_U = K \cdot \delta^{3/2}. \quad (6)$$

Коэффициент  $K$  зависит от свойств материалов контактируемых тел и формы их поверхностей в области контакта. Для контактируемых сферических поверхностей

$$K = \frac{4}{3} \cdot E_* \cdot R_*^{1/2},$$

где  $1/R_* = 1/R_1 + 1/R_2$ ;

$1/E_* = (1 - \mu_1^2)/E_1 + (1 - \mu_2^2)/E_2$ ;

здесь  $R_1, R_2$  - радиусы поверхностей в области контакта;  $E_1, E_2$  - модули упругости материалов тел;  $\mu_1, \mu_2$  - коэффициенты Пуассона материалов тел.

Более подробно с моделью Герца и другими подобными моделями контактного взаимодействия, основанными на теории местных контактных напряжений, можно ознакомиться в литературе [3].

Модель Герца описывает только упругую компоненту контактной силы. С практической точки зрения представляет интерес модифицированная модель Герца с вязкой компонентой, устраненным “прилипанием” и коэффициентом восстановления, не зависящим от скорости соударения тел. Такая модель имеет следующий вид

$$F = K \cdot \delta^{3/2} + D \cdot \delta^{1/4} \cdot \dot{\delta},$$

$$F \geq 0,$$
(7)

где  $D$  - коэффициент вязкой компоненты. Значение этого коэффициента определяет значение коэффициента восстановления.

На рис. 5 представлены характеристики процесса соударения тел по модифицированной модели Герца (7).

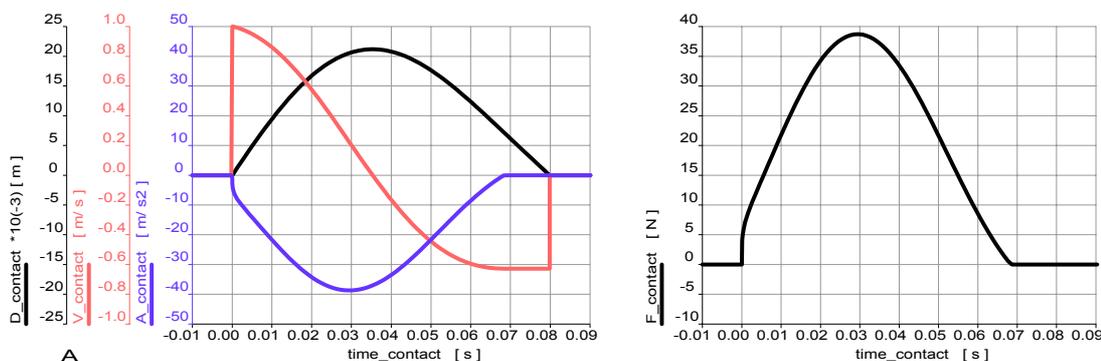


Рис. 5. Характеристики процесса соударения тел по модифицированной модели Герца (введена вязкая компонента, устранено “прилипание”)

### Модель “резиновый столбик”

Модель “резиновый столбик” может использоваться для моделирования резиновых отбойников. Внешний вид типового элемента, описываемого данной моделью, представлен на рис. 6.

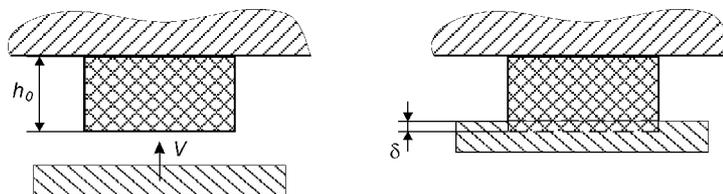


Рис. 6. Деформируемый элемент “резиновый столбик”

Упругая компонента силы контактного взаимодействия тел в модели “резиновый столбик” определяется следующим образом

$$F_U = c_0 \cdot h_0 \cdot \frac{\delta}{(h_0 - \delta)},$$
(8)

где  $c_0$  - коэффициент жесткости в начальной точке сжатия столбика;  $h_0$  - высота деформируемого столбика в свободном состоянии.

Модель (8) хорошо согласуется с экспериментальными данными сжатия резины. В окрестности малых деформаций сила соответствует закону Гука, как и в модели Кельвина-Фохта. При увеличении деформации модель правильно отражает физику процесса, сила сжатия асимптотически увеличивается при приближении  $\delta$  к  $h_0$ . График упругой компоненты силы контактного взаимодействия тел для модели (8) представлен на рис. 7. Для определения вязкой компоненты для модели (8) можно использовать те же подходы, что и в модели Кельвина-Фохта и ее модификациях.

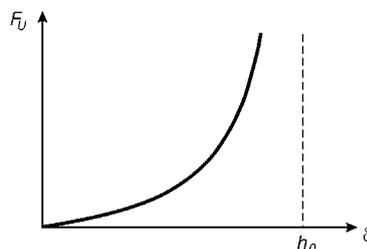


Рис. 7. Упругая сила контактного взаимодействия для модели “резиновый столбик”

## Моделирование ударных взаимодействий в EULER

Примеры моделирования ударных взаимодействий находятся в каталоге **examples\_impact**.

Файлы **test\_impact\_KF.elr**, **test\_impact\_Maxwell.elr**, **test\_impact\_Hertz.elr** содержат проекты демонстрационных примеров моделирования ударов по моделям Кельвина-Фохта, Максвелла, Герца. По этим проектам были получены графики процессов, представленные выше в данном разделе.

Файлы **impact\_3\_KF.elr**, **impact\_3\_Maxwell.elr**, **impact\_3\_Hertz.elr** содержат проекты одновременного удара трех одинаковых тел с различными скоростями о неподвижную платформу по моделям Кельвина-Фохта, Максвелла, Герца.

Файл **MME\_model\_RS.elr** содержит исследование модели сброса груза на подушку. Ниже этот пример рассмотрен более подробно.

### Сброс груза на подушку

В данном примере демонстрируется определение параметров модели ударного взаимодействия по результатам натуральных экспериментов.

Для измерения ударных вертикальных нагрузок на экипаж транспортных средств в процессе испытаний иногда используют массовый эквивалент человека (МЭЧ), который представляет собой груз с установленными на нем датчиками ускорений. При испытаниях МЭЧ устанавливаются на подушки сиденья членов экипажа. Для математического моделирования таких испытаний необходима модель взаимодействия МЭЧ с подушкой сиденья. Для определения параметров этой модели были проведены эксперименты по сбросу МЭЧ на подушку сиденья с различных высот. МЭЧ представляет собой однородную стальную плиту размером 350x350x80 мм и массой 80 кг. На МЭЧ были установлены два датчика a1 и a2 для измерения вертикального ускорения. Расстояние между датчиками 140 мм. Было проведено два эксперимента по сбрасыванию МЭЧ с высоты 20 и 40 см. Результаты измерений датчиков представлены на рис. 8. Результаты измерения двух датчиков имеют некоторые отклонения друг от друга, что может быть объяснено неравномерной упругостью подушки сиденья по ее площади и другими факторами. Другие данные, и в частности, характеристика упругости подушки сиденья отсутствуют.

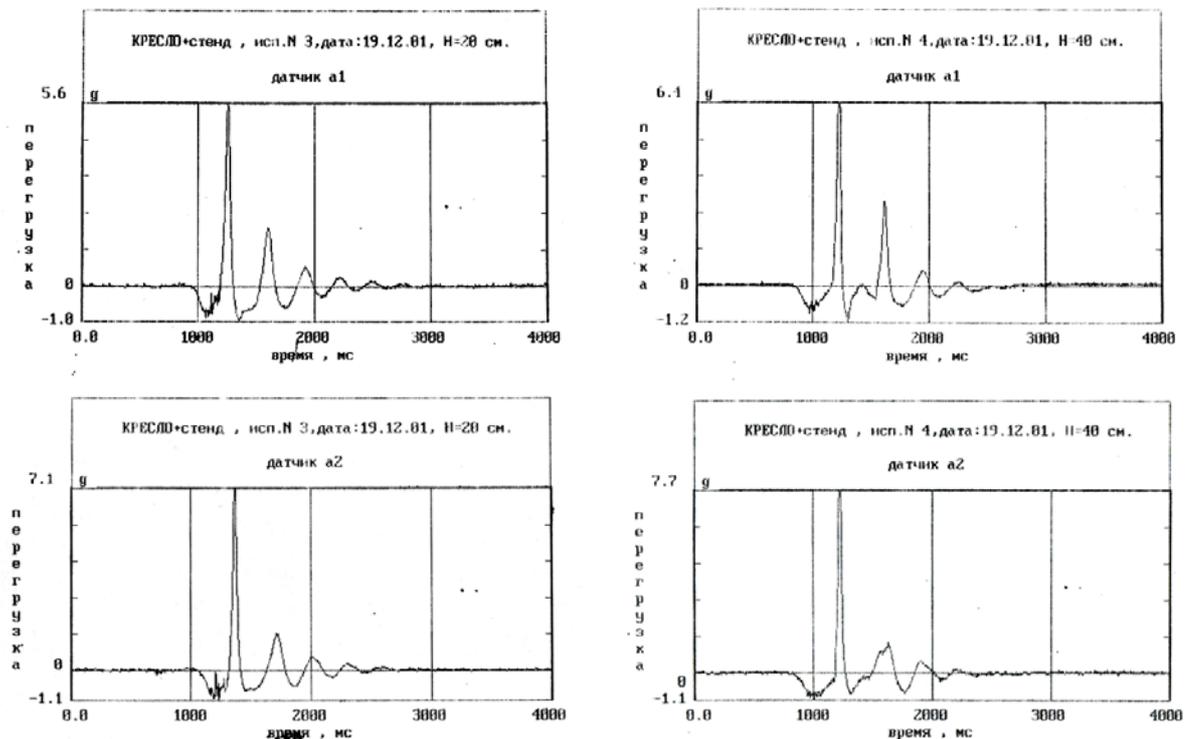


Рис. 8. Относительные ускорения при сбросе МЭЧ на подушку сиденья (эксперимент)

Необходимо сформировать модель взаимодействия МЭЧ с подушкой сиденья, которая адекватно отражала бы результаты экспериментов. В данном случае желательно совпадение с экспериментальными данными максимальных ускорений МЭЧ на первом и втором пиках, а также частоты колебаний МЭЧ на подушке. При этом совпадение максимальных ускорений на первом пике более важно чем на втором. По экспериментальным данным на рис. 8 с усреднением датчиков a1 и a2 получены следующие характеристики

$T = 0.29[s]$  – период малых колебаний МЭЧ в окрестности точки равновесия;

$n1_{20} = 6.35$  – максимальное относительное ускорение на первом пике при сбросе с высоты 20 см;

$n2_{20} = 1.64$  – максимальное относительное ускорение на втором пике при сбросе с высоты 20 см;

$n1_{40} = 7.05$  – максимальное относительное ускорение на первом пике при сбросе с высоты 40 см;

$n2_{40} = 2.12$  – максимальное относительное ускорение на втором пике при сбросе с высоты 40 см.

Будем использовать вязкоупругую модель. В качестве достаточно правдоподобной модели упругой компоненты примем модель “резиновый столбик” (8). В качестве вязкой компоненты будем использовать степенную функцию (2). Таким образом принятая модель взаимодействия МЭЧ с подушкой сиденья имеет следующий вид

$$F = c_0 \cdot h_0 \cdot \frac{\delta}{(h_0 - \delta)} + D \cdot \delta^\eta \cdot \dot{\delta}^\mu. \quad (9)$$

Коэффициент  $c_0$  будем определять из условия заданного периода малых колебаний МЭЧ в окрестности точки равновесия  $T = 0.29$ [s]. Условие равновесия МЭЧ для модели (9) имеет следующий вид

$$m \cdot g_0 = c_0 \cdot h_0 \cdot \frac{\delta_*}{(h_0 - \delta_*)}, \quad (10)$$

где  $m$  - масса МЭЧ;  $g_0$  - ускорение свободного падения;  $\delta_*$  - деформация в точке равновесия.

Из условия равновесия (10) получаем

$$\delta_* = \frac{m \cdot g_0 \cdot h_0}{m \cdot g_0 + c_0 \cdot h_0}. \quad (11)$$

Коэффициент жесткости (фактически это производная упругой компоненты по деформации) для модели (9) в зависимости от деформации равен

$$c = \frac{\partial F}{\partial \delta} = \frac{c_0 \cdot h_0^2}{(h_0 - \delta)^2}, \quad (12)$$

Подставив (11) в (12) получим выражение для коэффициента жесткости в точке равновесия

$$c_* = \frac{(m \cdot g_0 + c_0 \cdot h_0)^2}{c_0 \cdot h_0^2}. \quad (13)$$

Для частоты малых колебаний МЭЧ в окрестности точки равновесия можно записать следующее выражение

$$\omega = \sqrt{\frac{c_*}{m}} = \frac{2 \cdot \pi}{T}. \quad (14)$$

Подставив (13) в (14) получим квадратное уравнение относительно  $c_0$ , из решения которого получаем следующее выражение

$$c_0 = m \cdot \left[ -\frac{g_0}{h_0} + \frac{2 \cdot \pi}{T^2} \cdot \left( \pi + \sqrt{\pi^2 - \frac{g_0 \cdot T^2}{h_0}} \right) \right]. \quad (15)$$

Выражение (15) будем использовать для определения  $c_0$ .

Коэффициенты  $h_0, D, \eta, \mu$  будем определять из условия минимизации расхождения максимальных ускорений МЭЧ на первом и втором пиках между моделью и экспериментом. В качестве критерия минимизации будем использовать значение следующего выражения

$$CRIT = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{|n1_{20} - nm1_{20}|}{n1_{20}} + \frac{|n1_{40} - nm1_{40}|}{n1_{40}} + k_{n2} \cdot \left( \frac{|n2_{20} - nm2_{20}|}{n2_{20}} + \frac{|n2_{40} - nm2_{40}|}{n2_{40}} \right) \right],$$

где  $nm1_{20}, nm2_{20}, nm1_{40}, nm2_{40}$  - максимальные относительные ускорения на первом и втором пиках при сбросе с высот 20 и 40 см, которые получаются в результате расчета модели;  $k_{n2}$  - коэффициент относительной значимости вторых пиков ускорения.

В файле **MME\_model\_RS.elr** содержится решение описанной задачи определения коэффициентов модели ударного взаимодействия при сбросе груза (МЭЧ) на подушку сиденья. Для оптимизации коэффициентов модели использовался метод покоординатного спуска. Как показали исследования, принятая функция критерия является многоэкстремальной, поэтому задавая в качестве начальной точки различные значения можно коэффициентов  $h_0, D, \eta, \mu$  получить в результате оптимизации различные решения. На рис. 9 представлены графики относительных ускорений МЭЧ, полученных в модели, для трех различных решений. Сравнивая графики относительных ускорений в эксперименте и в модели на рис. 8-9 можно сделать вывод, что качественно все три представленные варианта модели достаточно хорошо отражают экспериментальные данные. Для получения лучшего количественного согласования модели с экспериментом можно исследовать другие модели ударного взаимодействия.

высота сброса 20 см

высота сброса 40 см

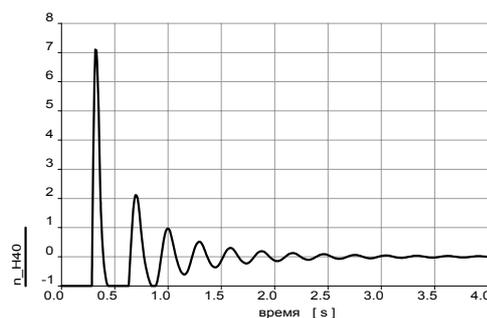
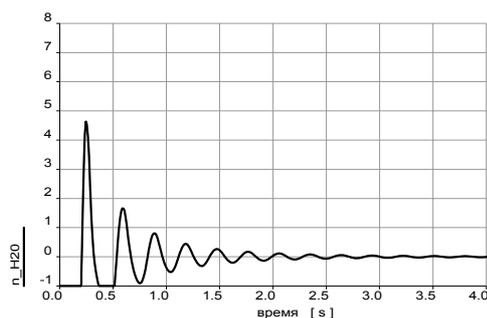
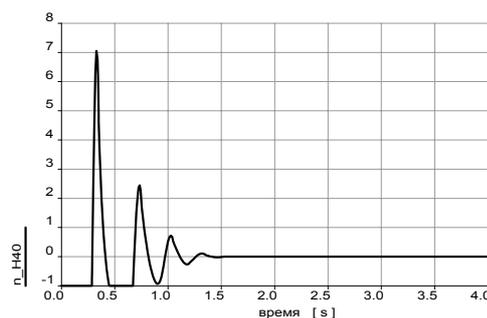
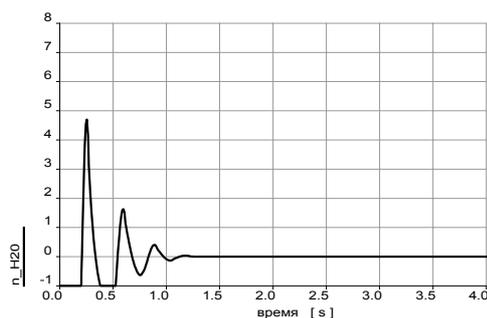
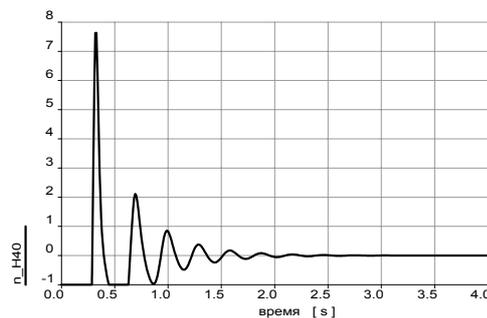
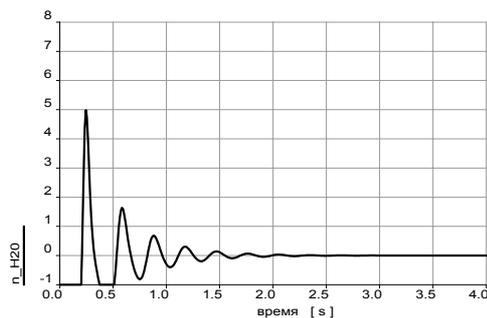
a)  $h_0=0.19[m]$ ;  $D=1950[N]$ ;  $\eta=0.75$ ;  $\mu=1.25$ ;  $CRIT=0.140$ ;b)  $h_0=0.38[m]$ ;  $D=4100[N]$ ;  $\eta=0.80$ ;  $\mu=0.65$ ;  $CRIT=0.146$ ;c)  $h_0=0.21[m]$ ;  $D=2950[N]$ ;  $\eta=0.95$ ;  $\mu=1.00$ ;  $CRIT=0.149$ ;

Рис. 9. Относительные ускорения при сбросе МЭЧ на подушку сиденья (три варианта модели)

### Литература по вопросам ударного взаимодействия

1. Батуев Г.А., Голубков Ю.В., Ефремов А.К., Федосов А.А. Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроение, 1977. 240 с.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
4. Динамика удара / Дж. А. Зукас, Т. Николас, Х.Ф. Свифт и др. М.: Мир, 1985. 296 с.
5. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
6. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие. Удар. Киев: Наукова Думка, 1976. 320 с.
7. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел. Киев: Наукова Думка, 1969. 246 с.
8. Машиностроение. Энциклопедия / Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) и др. Том 1-3. Книга 1. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. / К.С. Колесников, Д.А. Александров, В.К. Асташев и др.; Под общ. ред. К.С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1994, 534 с. (Глава 6.7. Удар стр. 404-422)
9. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. М.: Машиностроение, 1977. 220 с.
10. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. М.: Машиностроение, 1976. 320 с.